2.1.16 Parametrické systémy lineárních funkcí I

Předpoklady: 2110

Pedagogická poznámka: Tato hodina vznikla až v Třeboni kvůli problémům, které studenti měli s následující hodinou. Ukázalo se, že problémy, kterých jsem si všiml už ve Strakonicích, mají asi trochu hlubší důvody, než jsem si zprvu myslel. Jde o první seznámení s parametry, stejně jako později u rovnic se snažím o to, aby studenti pochopili, že jde o metodu, jak popsat více věcí najednou.

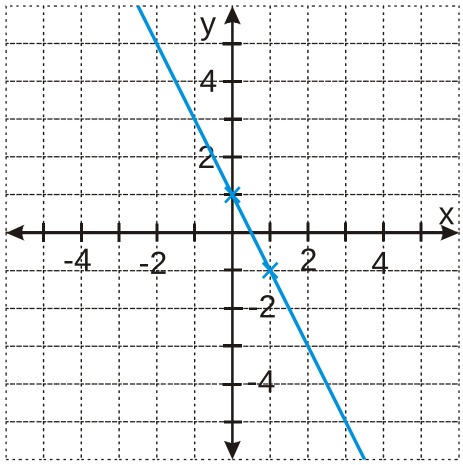
Pedagogická poznámka: Nutnou podmínkou pro kreslení parametrických systémů lineárních funkcí je schopnost rychle kreslit grafy konkrétních lineárních funkcí. Proto začátek hodiny obsahuje opakování a diskusi o nejrychlejších metodách.

Př. 1: Nakresli co nejrychleji graf funkce $y = -2x + 1$.

$y = -2x + 1$

koeficient $b = 1 \Rightarrow$ funkce prochází bodem $[0;1]$

koeficient $a = -2$, funkce je klesající, když se x změní o 1, změní se y o $-2 \Rightarrow$ dalším bodem je například bod $[1;-1]$



Dodatek: Graf můžeme samozřejmě nakreslit také pomocí dvou bodů získaných dosazením:

$x = 0 \Rightarrow y = -2x + 1 = -2 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0;1]$

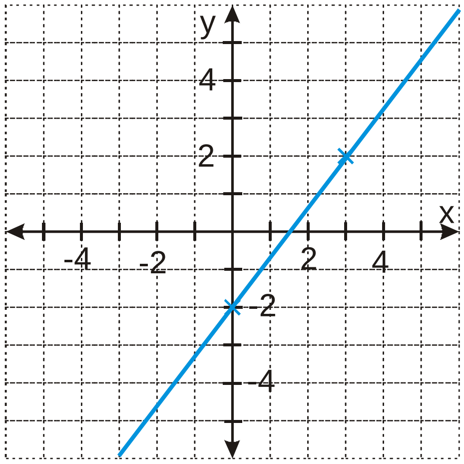
$x = 2 \Rightarrow y = -2x + 1 = -2 \cdot 2 + 1 = -3 \Rightarrow$ bod $[2;-3]$

Př. 2: Nakresli co nejrychlejším postupem graf funkce $y = \frac{4}{3}x - 2$.

$y=\frac{4}{3}x-2$

koeficient $b=-2 \Rightarrow$ funkce prochází bodem $[0;-2]$

koeficient $a=\frac{4}{3}$, funkce je rostoucí, když se x změní o 3, změní se y o 4 $\Rightarrow$ dalším bodem je například bod $[3;2]$



Dodatek: Graf můžeme samozřejmě nakreslit také pomocí dvou bodů získaných dosazením:

$$x=0 \Rightarrow y=\frac{4}{3}x-2=\frac{4}{3}\cdot 0-2=-2 \Rightarrow \text{bod } [0;-2]$$

$$x=3 \Rightarrow y=\frac{4}{3}x-2=\frac{4}{3}\cdot 3-2=2 \Rightarrow \text{bod } [3;2]$$

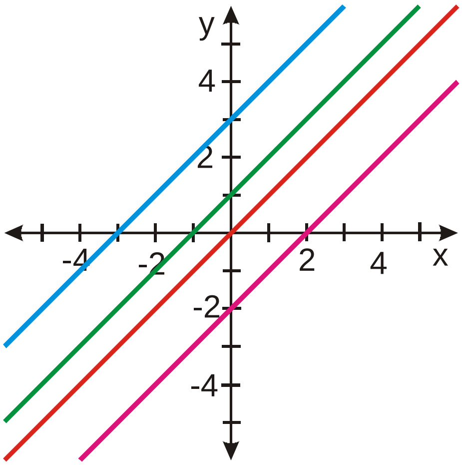
Pedagogická poznámka: Studenti se často ptají, jestli je něco špatného na tom, že kreslí grafy pomocí dvou bodů. Říkám jim, že špatně to určitě není, ale je to ve většině případů pomalejší.

Uvedený postup kreslení funkcí však nemá cenu nikde speciálně zformulovávat, měl by být důsledkem toho, že studenti při kreslení funkcí neustále přemýšlejí o tom, jak je nakreslit rychleji a úsporněji, o tom, jak hodnoty konstant v předpisu souvisejí s výsledným tvarem a využívají to.

Předchozí odstavec platí ještě více v následujících příkladech, kde kreslení „ze zkušenosti“ může ušetřit opravdu hodně času. Je potřeba ale zdůrazňovat, že kreslení ze dvou bodů je rozhodně správné a mělo by plnit roli „jistoty“, kterou studenti použijí, když nebudou vidět jiný postup.

Vrátíme se do historie (nedávné). Při zjišťování významu konstant *a*, *b* v předpisu lineární funkce $y=ax+b$ jsme do jednoho obrázku kreslili více funkcí, které se lišily například v hodnotě konstanty *b*:

Například grafy funkcí: $f_1: y=x$, $f_2: y=x+1$, $f_3: y=x+3$, $f_4: y=x-2$ ve společném obrázku vypadají takto:



Předpisy i grafy všech čtyř funkcí jsou si hodně podobné $\Rightarrow$ zkusíme ušetřit místo a zapíšeme je všechny najednou: $y = x + b; b \in \{-2;0;1;3\}$

$\Rightarrow$ místo čtyř funkcí jsme napsali jedinou. Na místě, kde se funkce navzájem lišily, je napsán **parametr *b*** („něco jako žolík“), za nějž můžeme dosazovat konkrétní hodnoty $\{-2;0;1;3\}$.

Dosazením hodnoty parametru získáme konkrétní lineární funkce (jak jsme je znali dosud). Parametrický zápis můžeme chápat jako vzorový předpis, ze kterého získáme dosazením hodnoty za parametr hotové konkrétní funkce.

Př. 3: Nakresli parametrický systém funkcí $y = -\frac{1}{2}x + b; b \in \{1;2;3\}$.

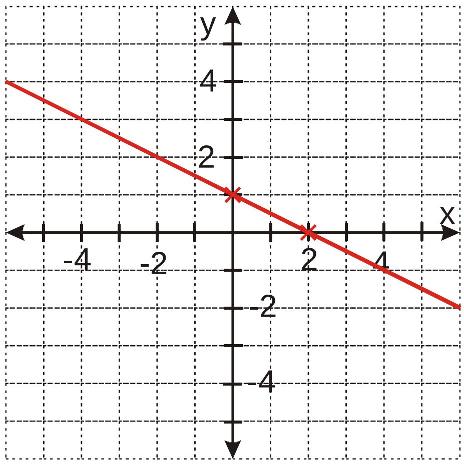
Postupně dosazujeme hodnoty parametru a kreslíme konkrétní funkce:

$b = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$

Kreslíme graf funkce $y = -\frac{1}{2}x + 1$:

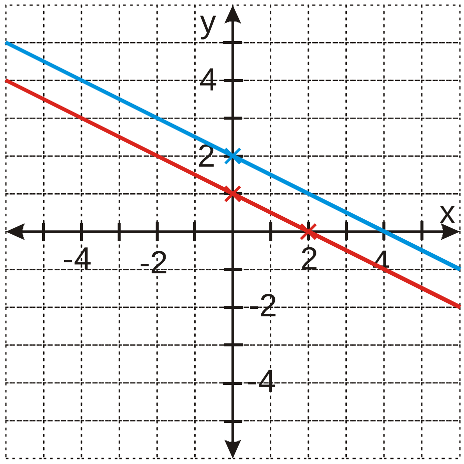
$b = 1 \Rightarrow$ funkce prochází bodem $[0;1]$.

$a = -\frac{1}{2}$ musíme změnit x o dvě, aby se y zmenšilo o 1 $\Rightarrow$ $[2;0]$.



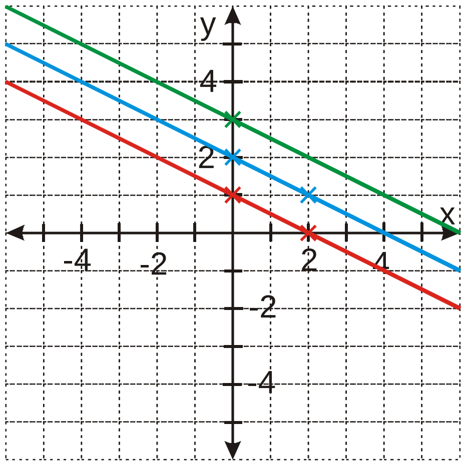
$b=2 \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2}x+2$

Funkce má stejnou hodnotu *a* jako předchozí
$\Rightarrow$ grafem bude rovnoběžná přímka,
$b=2 \;\Rightarrow$ funkce prochází bodem $[0;2]$.



$b=3 \;\Rightarrow\; y=-\frac{1}{2}x+3$

Funkce má stejnou hodnotu *a* jako předchozí
$\Rightarrow$ grafem bude rovnoběžná přímka,
$b=3 \;\Rightarrow$ funkce prochází bodem $[0;3]$.



Mohli jsme si ušetřit práci, z významu konstanty *b* bylo jasné, že všechny tři grafy budou rovnoběžné přímky s různým posunutím ve svislém směru.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu je třeba ohlídat, aby studenti dobře rozuměli tomu, že nejdříve si volí (ze tří možností) hodnotu parametru (například $b=1$). Touto volbou získají konkrétní funkci $y=-0,5x+1$. Při kreslení jejího grafu pak mohou volit hodnoty *x*, aby získali dva body na sestrojení grafu. Tato druhá volba není většinou nutná a jde o jinou úroveň řešení příkladu, než ve které volíme hodnotu parametru *b*.
Studentům, kteří s tím mají problémy, je třeba zdůrazňovat, že řešení příkladu probíhá na dvou úrovních. Ve vyšší úrovni volíme hodnoty parametru (a získáváme konkrétní funkce), v nižší úrovni kreslíme grafy těchto funkcí. Při kreslení grafu konkrétní funkce nás pak vůbec nezajímá, jakým způsobem jsme ji získali. Považuji tento příklad za jeden ze způsobů, jak studenty učit „spouštění podprogramů“.

Postřeh: Parametr nám při kreslení systému funkcí pomáhá. Konstanta $-\frac{1}{2}$ v předpisu funkce $y=-\frac{1}{2}x+b$ nám říká, že všechny kreslené funkce mají stejný sklon a jsou navzájem rovnoběžné, parametr *b* pak říká, že kreslené funkce se budou lišit v posunutí ve svislém směru. Při řešení dalších příkladů budeme společné rysy jednotlivých funkcí v systému využívat.

Př. 4: Nakresli parametrický systém funkcí $y = ax+1; a \in \{-1;0;1;2\}$.

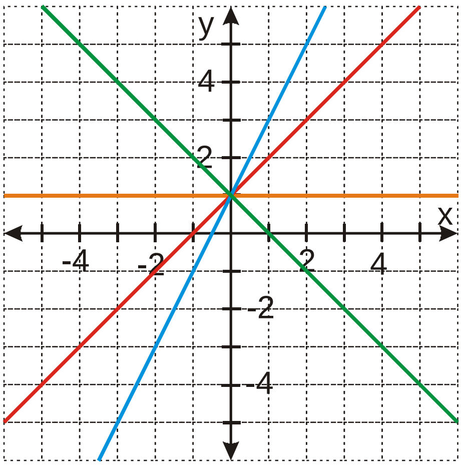
Postřeh: Funkce jsou dány předpisem $y = ax+1$ $\Rightarrow$ všechny grafy prochází bodem $[0;1]$

$a = 0$ $\Rightarrow$ $y = 0 \cdot x + 1 = 1$ - konstantní funkce

$a = 1$ $\Rightarrow$ $y = 1 \cdot x + 1 = x + 1$, $a = 1$, když zvětšíme x o 1, y se zvětší o 1 $\Rightarrow$ $[1;2]$

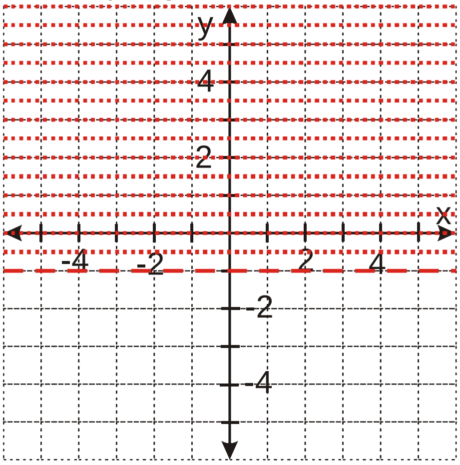
$a = 2$ $\Rightarrow$ $y = 2 \cdot x + 1 = 2x + 1$, $a = 2$, když zvětšíme x o 1, y se zvětší o 2 $\Rightarrow$ $[1;3]$

$a = -1$ $\Rightarrow$ $y = (-1) \cdot x + 1 = -x + 1$, $a = -1$, když zvětšíme x o 1, y se zmenší o 1 $\Rightarrow$ $[1;0]$



Př. 5: Nakresli parametrický systém funkcí $y = b; b \in (-1;\infty)$.

Postřeh: Všechny funkce $y = b = 0 \cdot x + b$ mají konstantu $a = 0$ $\Rightarrow$ všechny jsou konstantní $\Rightarrow$ kreslíme nekonečně mnoho vodorovných přímek, které se liší posunutím ve svislém směru
Hranou intervalu je $b = -1$ $\Rightarrow$ hledáme všechny funkce, jejichž grafy jsou výše než graf funkce $y = -1$ $\Rightarrow$ graf funkce $y = -1$ nakreslíme čárkovaně a tečkovaně naznačíme některé z hledaných grafů



Př. 6: Nakresli parametrický systém funkcí $y = 3x+b; b \in \langle -1;2 \rangle$.

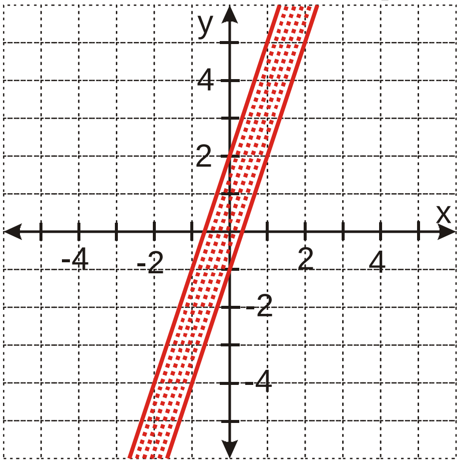
Postřeh: Všechny funkce $y = 3x+b$ mají konstantu $a = 3$ $\Rightarrow$ grafy všech hledaných funkcí jsou navzájem rovnoběžné přímky, které se liší v posunutí ve svislém směru
Dolní hranou intervalu je $b = -1$ $\Rightarrow$ kreslíme funkci $y = 3x - 1$

- prochází bodem $[0;-1]$, $a=3 \Rightarrow$ když se x zvětší o 1, zvětší se y o 3 $\Rightarrow$ další bod $[1;2]$

Horní hranou intervalu je $b=2 \Rightarrow$ kreslíme funkci $y=3x+2$

- její graf je rovnoběžný s grafem funkce $y=3x-1$, prochází bodem $[0;2]$

Ostatní hledané funkce leží v pásu mezi grafy předchozích funkcí



Př. 7: Nakresli parametrický systém funkcí $y=ax-1; a\in\langle -2;3)$.

Postřeh: Všechny funkce $y=ax-1$ mají konstantu $b=-1 \Rightarrow$ grafy všech hledaných funkcí prochází bodem $[0;-1]$

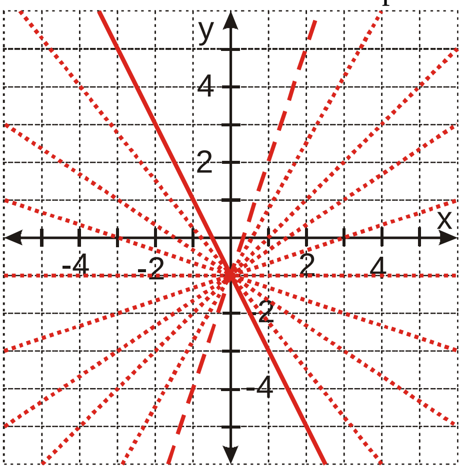
Dolní hranou intervalu je $a=-2 \Rightarrow$ kreslíme funkci $y=-2x-1$

- prochází bodem $[0;-1]$, $a=-2 \Rightarrow$ když se x zvětší o 1, zmenší se y o 2 $\Rightarrow$ další bod $[1;-3]$

Horní hranou intervalu je $a=3 \Rightarrow$ kreslíme funkci $y=3x-1$

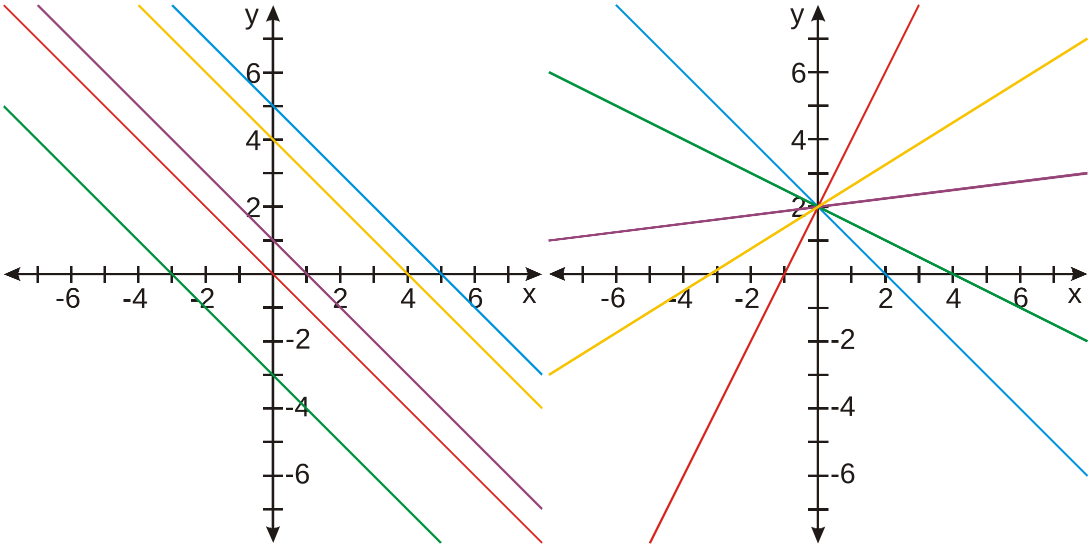
- prochází bodem $[0;-1]$, $a=3 \Rightarrow$ když se x zvětší o 1, zvětší se y o 3 $\Rightarrow$ další bod $[1;2]$

Ostatní hledané funkce leží v pásu mezi grafy předchozích funkcí



Pedagogická poznámka: Třídu synchronizuji u předchozího příkladu tak, aby se o následující dva příklady mohli pokusit všichni.

Př. 8: Na následujících obrázcích jsou naznačeny grafy parametrických systémů lineárních funkcí. Zapiš oba tyto systémy. Předpokládej, že v obrázcích jsou zachyceny extrémní možné případy (všechny hledané nenakreslené lineární funkce tedy musí ležet „mezi“ nakreslenými funkcemi). V obou případech volíme parametr z oboustranně uzavřeného intervalu.



a) všechny funkce na levém obrázku mají stejný sklon $\Rightarrow$ liší se v absolutním členu. Zajímají nás extrémní příklady $\Rightarrow$ zelená a modrá přímka

- modrá přímka: při zvětšení x o 1 se zmenší y o 1, prochází bodem $[0;5]$ $\Rightarrow$ jde o přímku $y=-x+5$
- zelená přímka: prochází bodem $[0;-3]$ $\Rightarrow$ jde o přímku $y=-x-3$

hledané lineární funkce můžeme zapsat $y=-x+b; b\in\langle -3;5\rangle$

b) všechny funkce na pravém obrázku prochází stejným bodem a liší se ve sklonu $\Rightarrow$ liší se v lineárním členu. Zajímají nás extrémní příklady $\Rightarrow$ červená a modrá přímka

- červená přímka: při zvětšení x o 1 se zvětší y o 2, prochází bodem $[0;2]$ $\Rightarrow$ jde o přímku $y=2x+2$
- modrá přímka: při zvětšení x o 2 se zmenší y o 2, prochází bodem $[0;2]$ $\Rightarrow$ jde o přímku $y=-x+2$

hledané lineární funkce můžeme zapsat $y=ax+2; a\in\langle -1;2\rangle$

Př. 9: Nakresli graf libovolné funkce:

a) $y=ax+1; a>0$ b) $y=x+b; b<0$

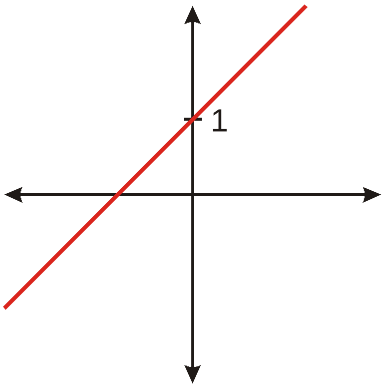
c) $y=ax+b; a<0; b>0$

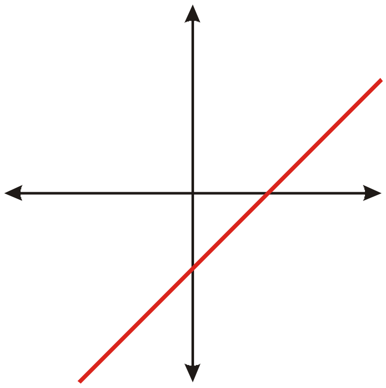
a) $y=ax+1; a>0$

libovolná rostoucí lineární funkce procházející bodem $[0;1]$

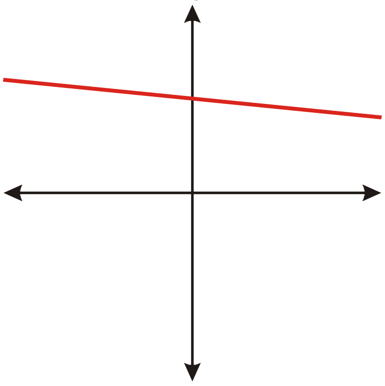
b) $y=x+b; b<0$

libovolná lineární funkce rovnoběžná s funkcí $y=x$, která se s osou y protíná pod osou x





c) $y = ax + b; a < 0; b > 0$
libovolná klesající lineární funkce, která se s osou *y* protíná nad osou *x*



Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je pro část studentů opět těžký v tom, že mají obrovskou volnost, která je paradoxně strašně svazuje.

Shrnutí: Parametr nám umožňuje najednou popsat více funkcí.